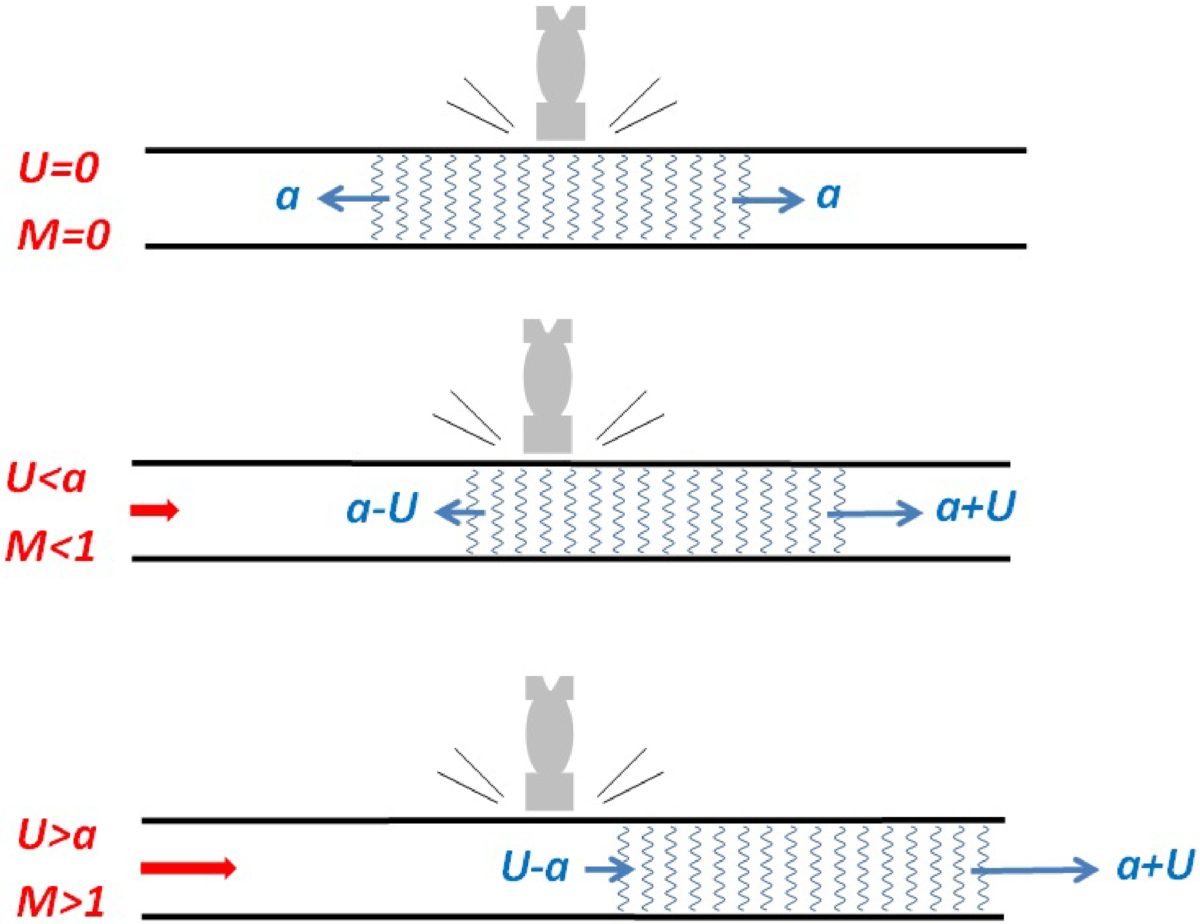
Mécanique des Fluides Compressibles
Ecoulements Isentropiques Permanents

Dr. Flavio NOCA

Semestre printemps 2024-2025

Ondes de Mach

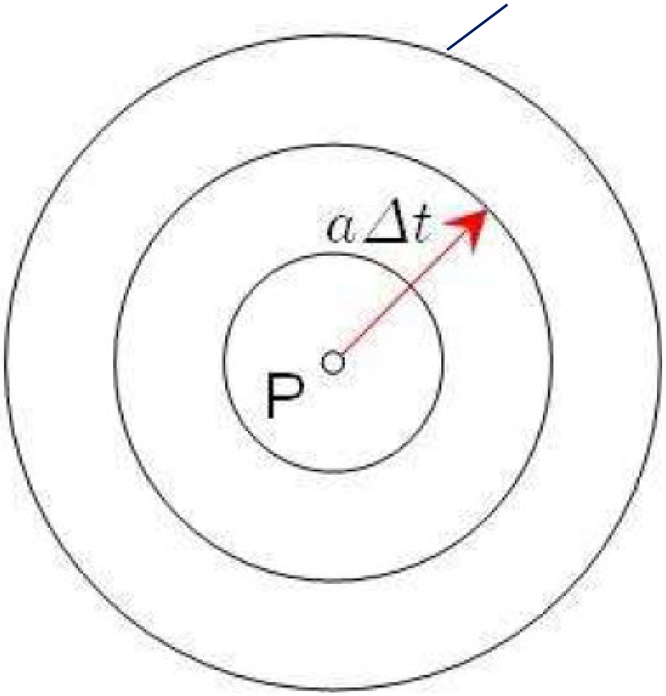
Onde acoustique se propage à la vitesse du son *a* dans un <u>référentiel fixe par rapport au fluide</u>



Ondes de Mach

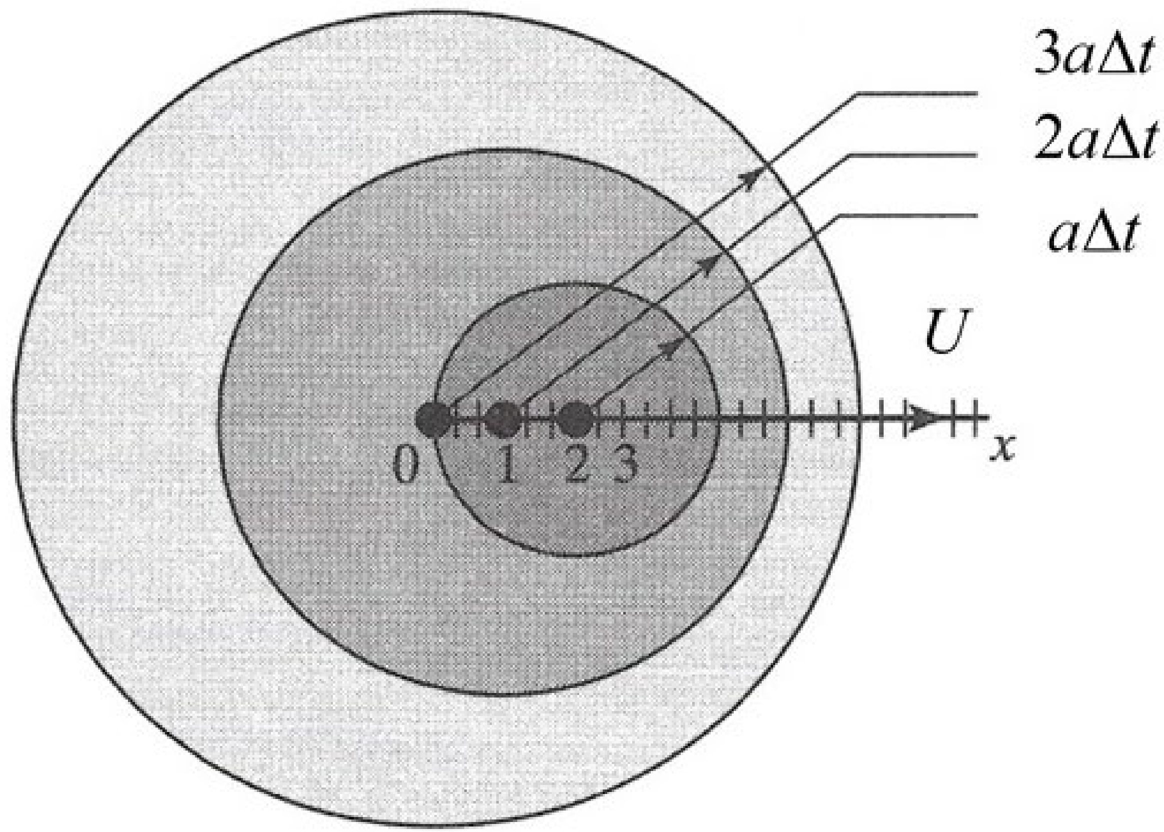
$$M = \frac{u}{a} \ll 1$$

ondes de perturbation de pression de vitesse a



u : vitesse du point P

$$M = \frac{u}{a} < 1$$



Configuration des ondes à

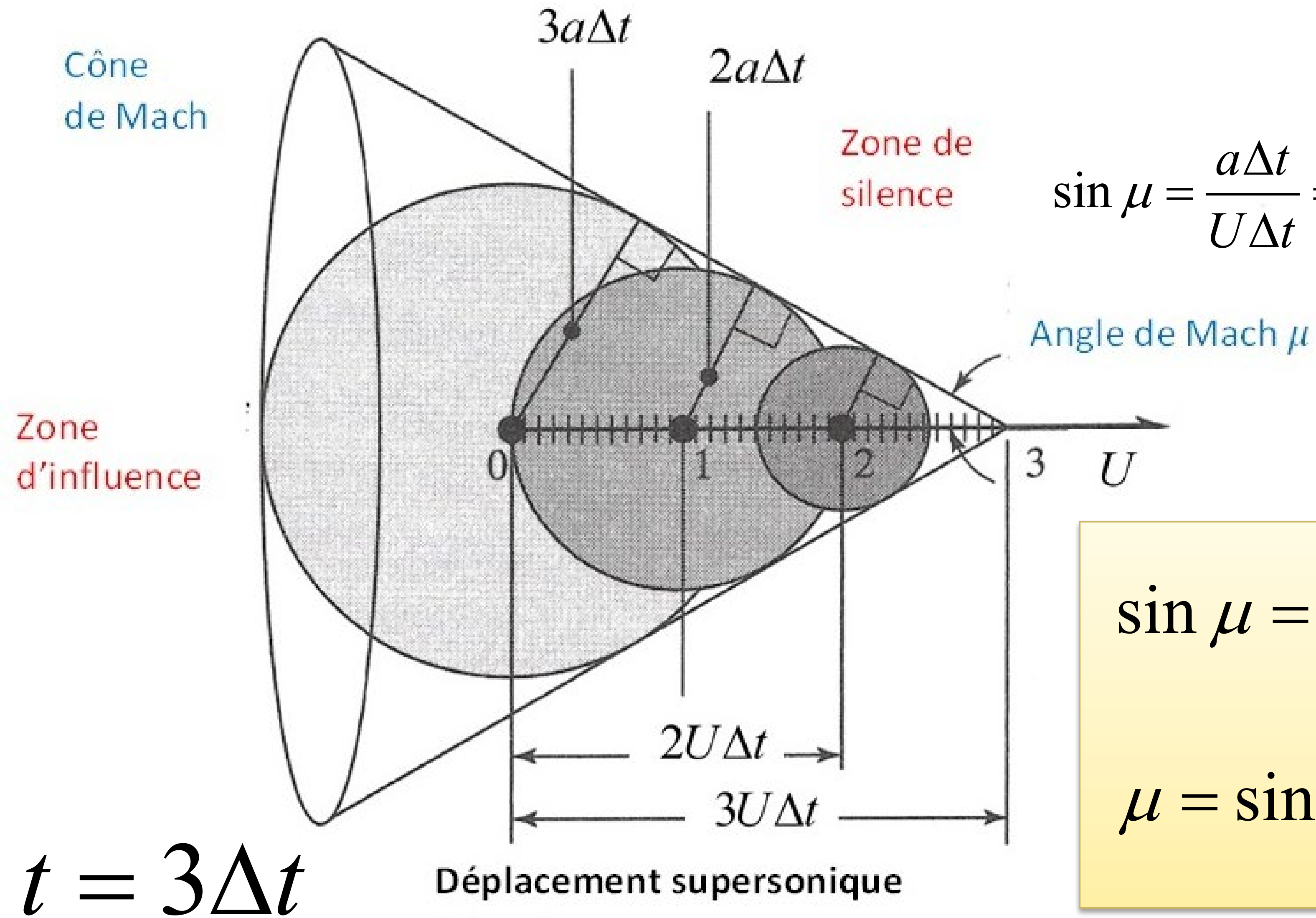
$$t = 3\Delta t$$

Déplacement subsonique

Ondes de Mach

$$M = \frac{u}{a} > 1$$

Ondes de Mach



$$\sin\mu = \frac{a\Delta t}{U\Delta t} = \frac{2a\Delta t}{2U\Delta t} = \ldots$$

$$\sin\mu = \frac{a}{U} = \frac{1}{M}$$

$$\mu = \sin^{-1}\frac{1}{M}$$

$$t = 3\Delta t$$

Ondes de Mach

Une onde de Mach, une ligne de Mach, ou cône de Mach

- = onde acoustique (isentropique)
- = onde de pression d'intensité Δp infinitésimale par rapport à ρa^2

$$\frac{d\rho}{\rho} = \alpha_s \cdot dp \longrightarrow \boxed{\frac{\Delta\rho}{\rho} \sim \frac{\Delta p}{\rho a^2} \ll 1}$$

$$\alpha_s = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_s = \frac{1}{\rho a^2}$$

- Exemple: l'oreille humaine est sensible à des différences de pressions acoustiques bien inférieure à la pression atmosphérique

$$\rho a^2 \sim p_{atm} \sim 100'000\ Pa$$

$$\left.\begin{matrix} 2\times 10^{-5}\ Pa \\ 0\ dB \end{matrix}\right\} \ll \Delta p_{oreille} \ll \left\{\begin{matrix} 20\ Pa \\ 120\ dB \end{matrix}\right.$$

Ondes de Mach:
Source fixe dans un écoulement

Ecoulement supersonique

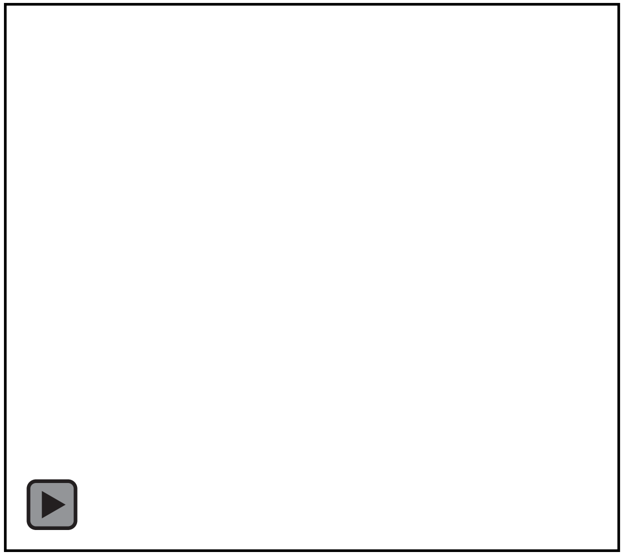
Source au repos

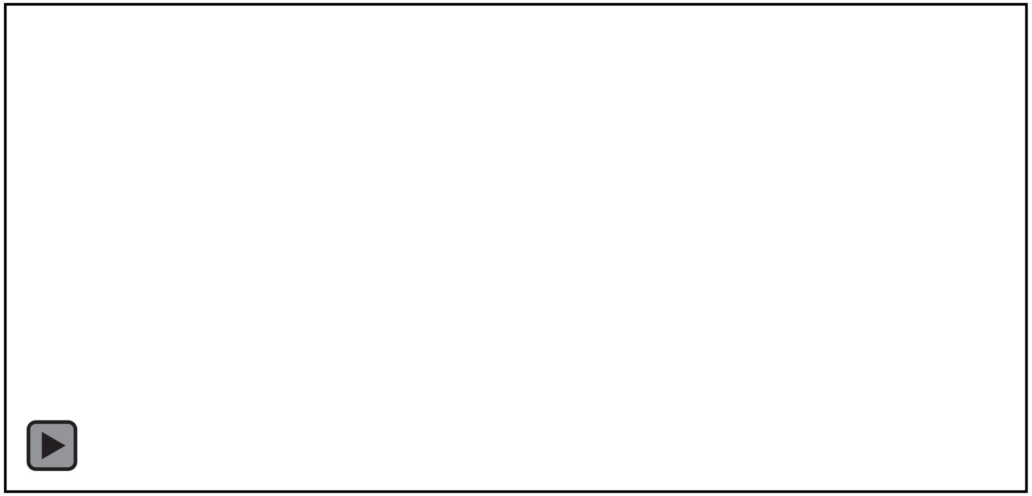
Ondes de Mach

$$M = 1$$

$$\sin \mu = \frac{1}{M} = 1$$

$$\mu = 90^\circ$$



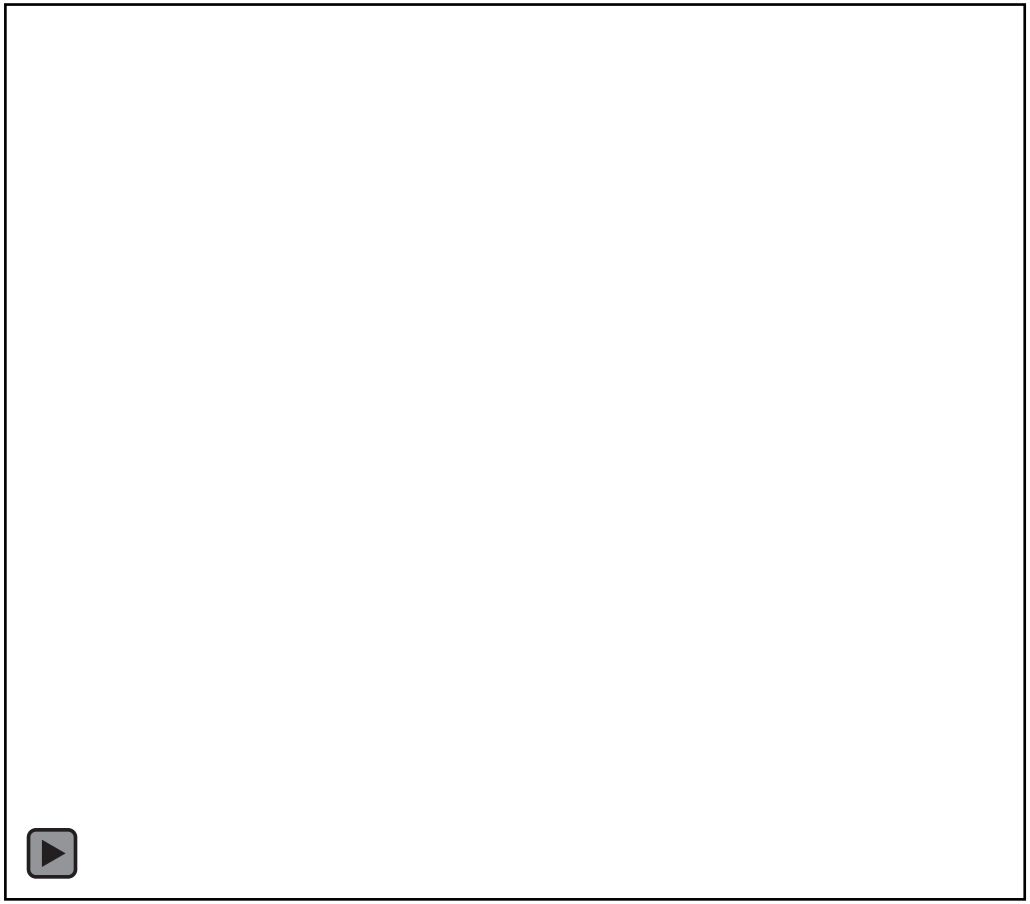


Ondes de Mach

$$M = 2$$

$$\sin \mu = \frac{1}{M} = \frac{1}{2}$$

$$\mu = 30^\circ$$



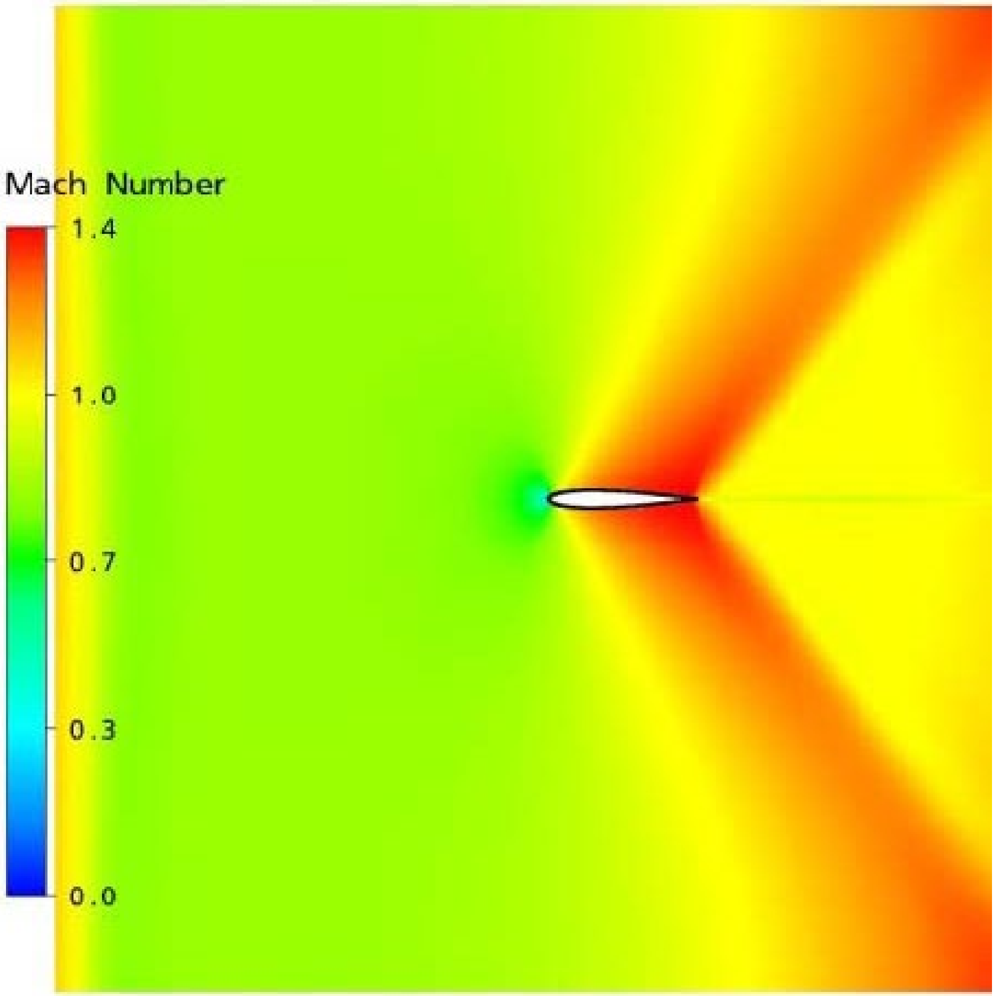
Ondes de Mach

$$M = 3$$

$$\sin\mu = \frac{1}{M} = \frac{1}{3}$$

$$\mu = 17.46^\circ$$

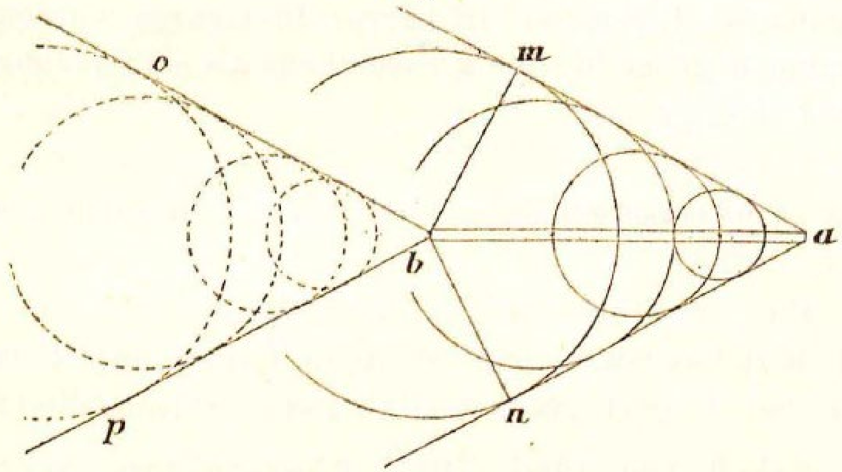
Ondes de Mach



Mach, Ernst, P. Salcher. "Photographische Fixierung der durch Projectile in die Luft eingeleiteten Vorgänge." Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften: Mathematisch-Naturwissenschaftliche Classe 95, (1887): 764–781.

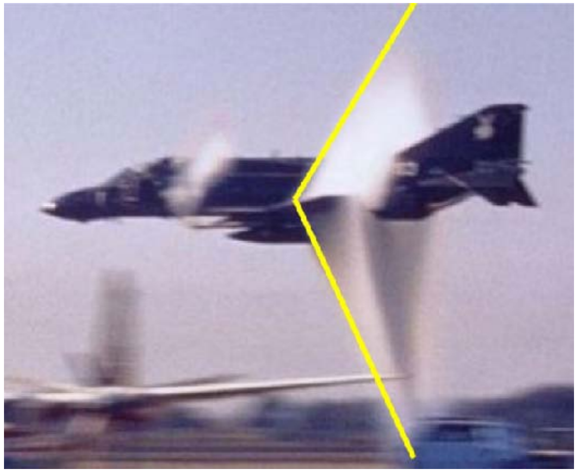
Um zum Verständniss der Erscheinungen zu gelangen, denken wir uns zunächst einen unendlich dünnen Stab $a\ b$, Fig. 2, von beträchtlicher Länge, welcher nach der Richtung $b\,a$ mit einer

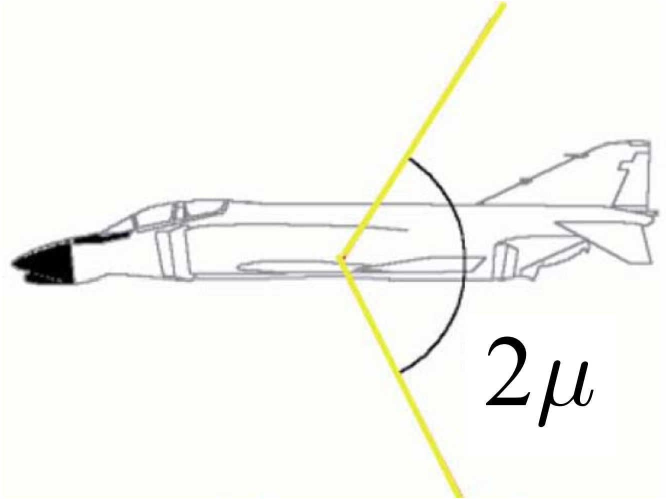
Fig. 2.



die Schallgeschwindigkeit übersteigenden Geschwindigkeit in der Luft bewegt wird. Derselbe wird bei a unausgesetzt unendlich kleine Verdichtungen erzeugen, welche sich als Schallwellen ausbreiten. Die betreffenden Huyghens'schen Elementarwellen werden als Enveloppe einen Kegel bilden, dessen Schnitt mit der Zeichnungsebene durch $m\ a\ n$ dargestellt ist. Bezeichnen wir den Winkel $m\ a\ b$ mit α, die Schallgeschwindigkeit mit υ, die Progressivgeschwindigkeit (Projectilgeschwindigkeit des Stabes mit ω, so ist $\frac{\upsilon}{\omega} = \sin\alpha$.

Ondes de Mach

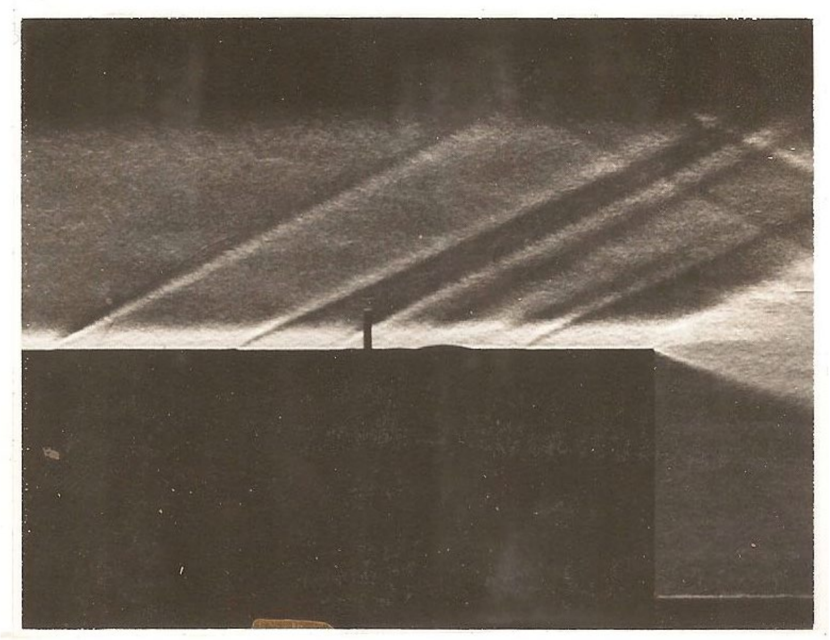


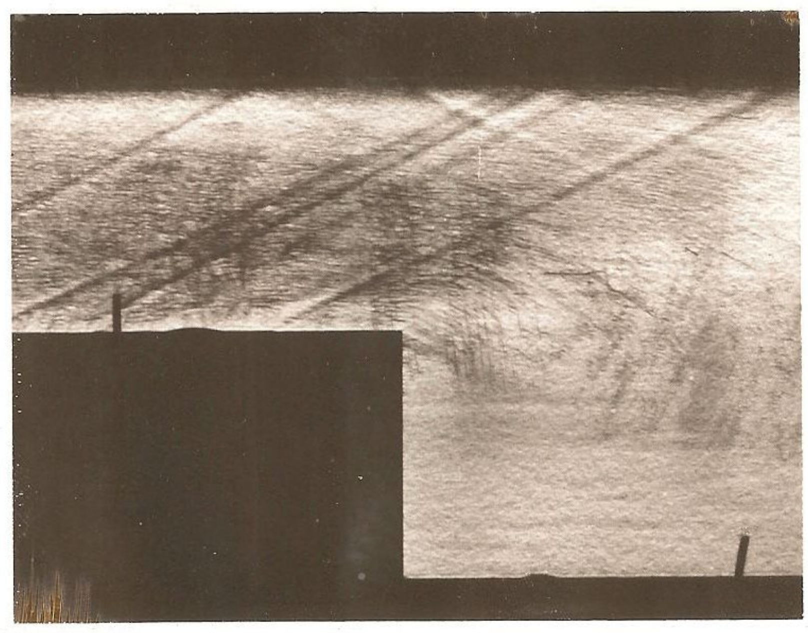


$$2\mu = 120^\circ \rightarrow M = \frac{1}{\sin\mu} = 1.15$$

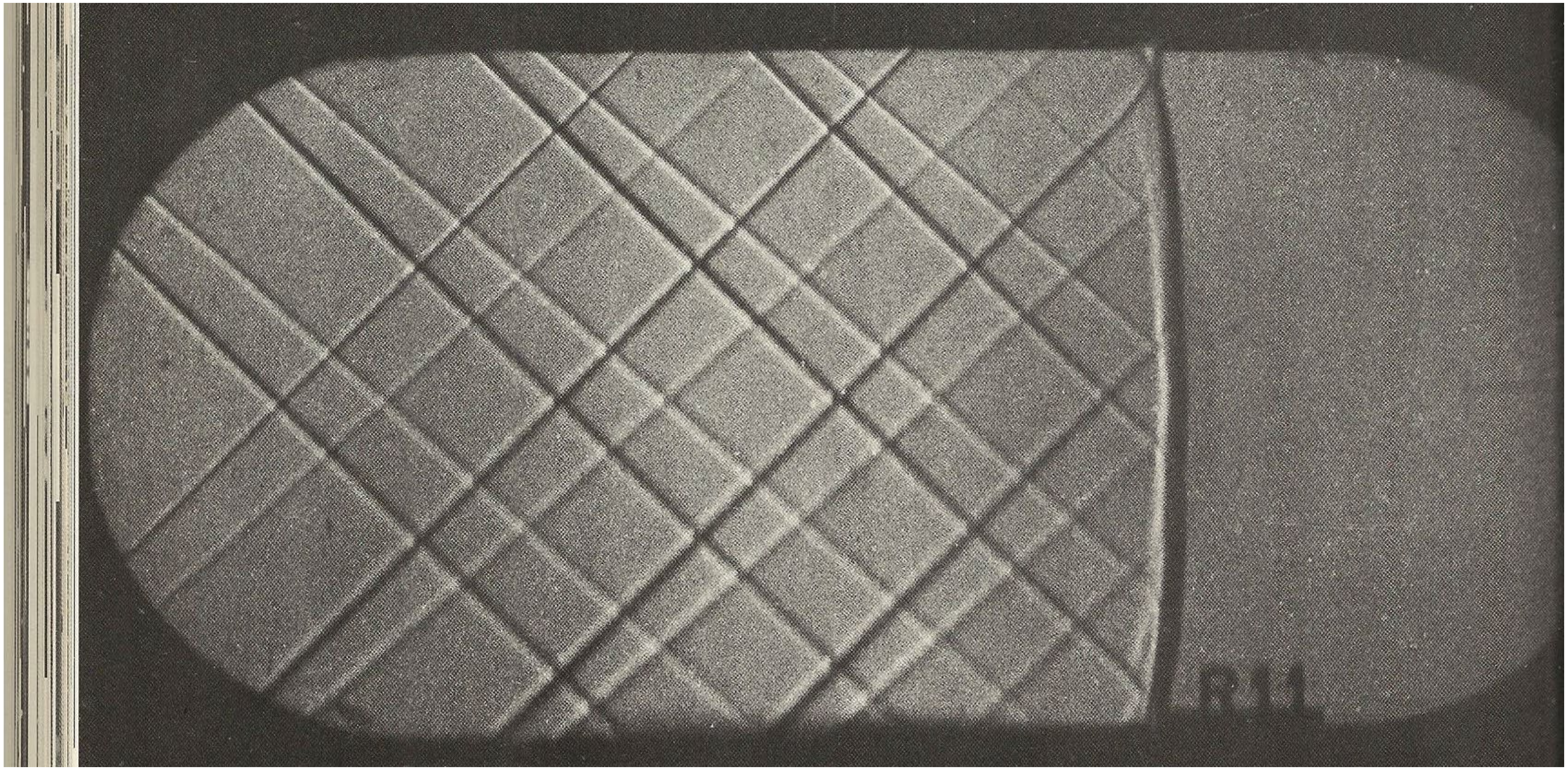
ATTENTION: le processus de condensation n'est pas adiabatique, et donc non parfaitement isentropique (une légère compression se produit également), donc le front de condensation n'est pas rigoureusement une onde de Mach.

Ondes de Mach





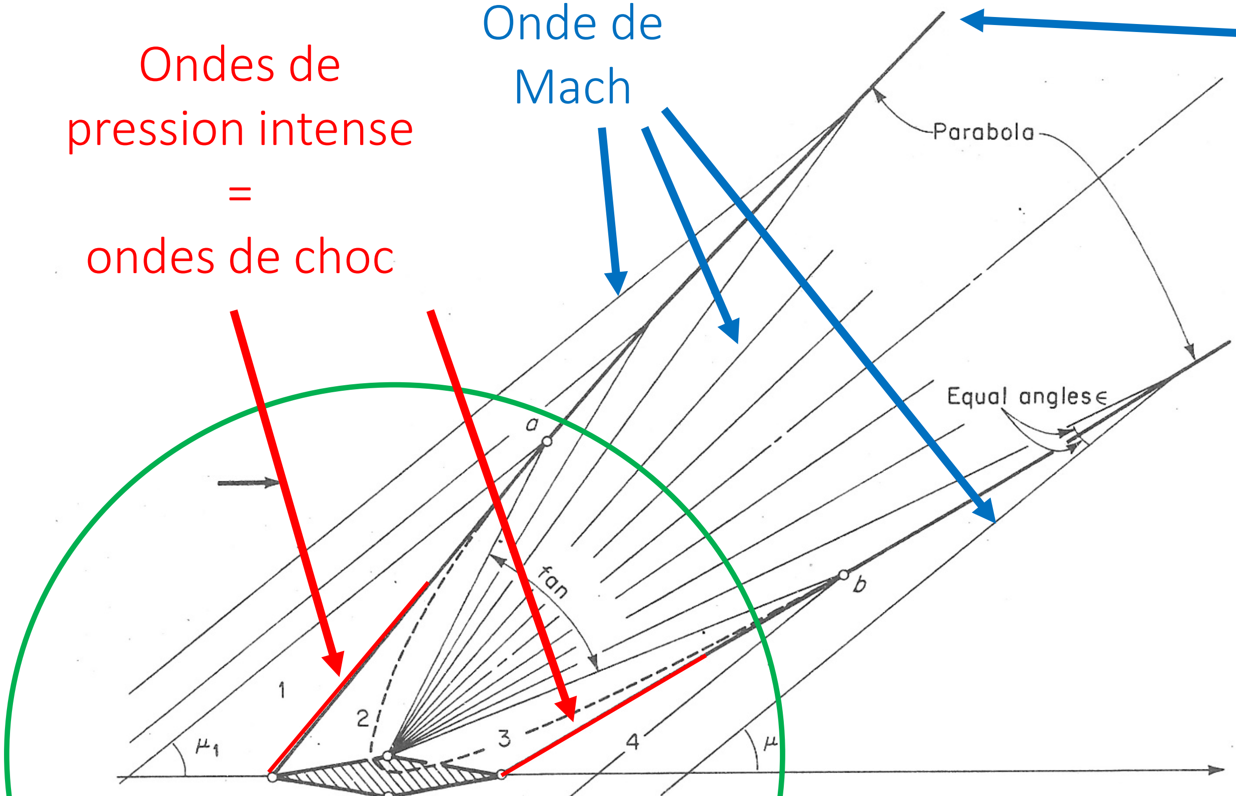
Ondes de Mach



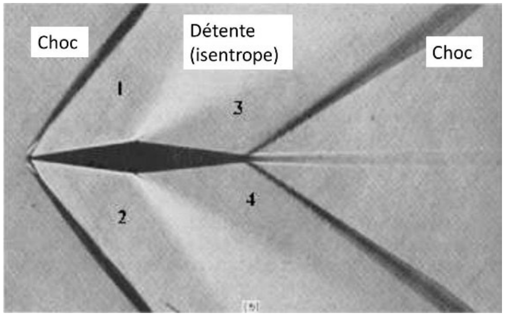
Ondes de Mach vs Ondes de Choc

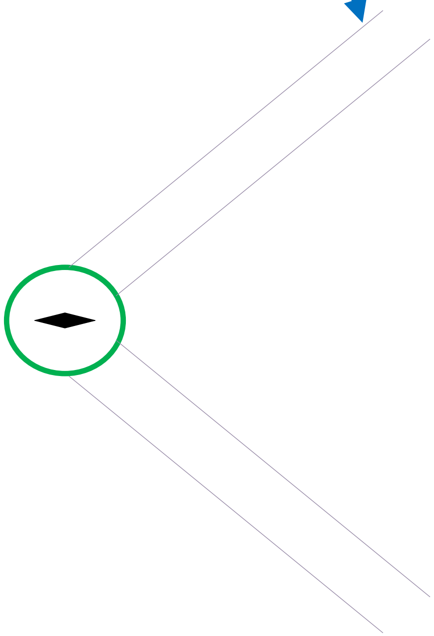
Ondes de pression intense = ondes de choc

Onde de Mach



Une onde de Mach est une onde de pression d'intensité infinitésimale

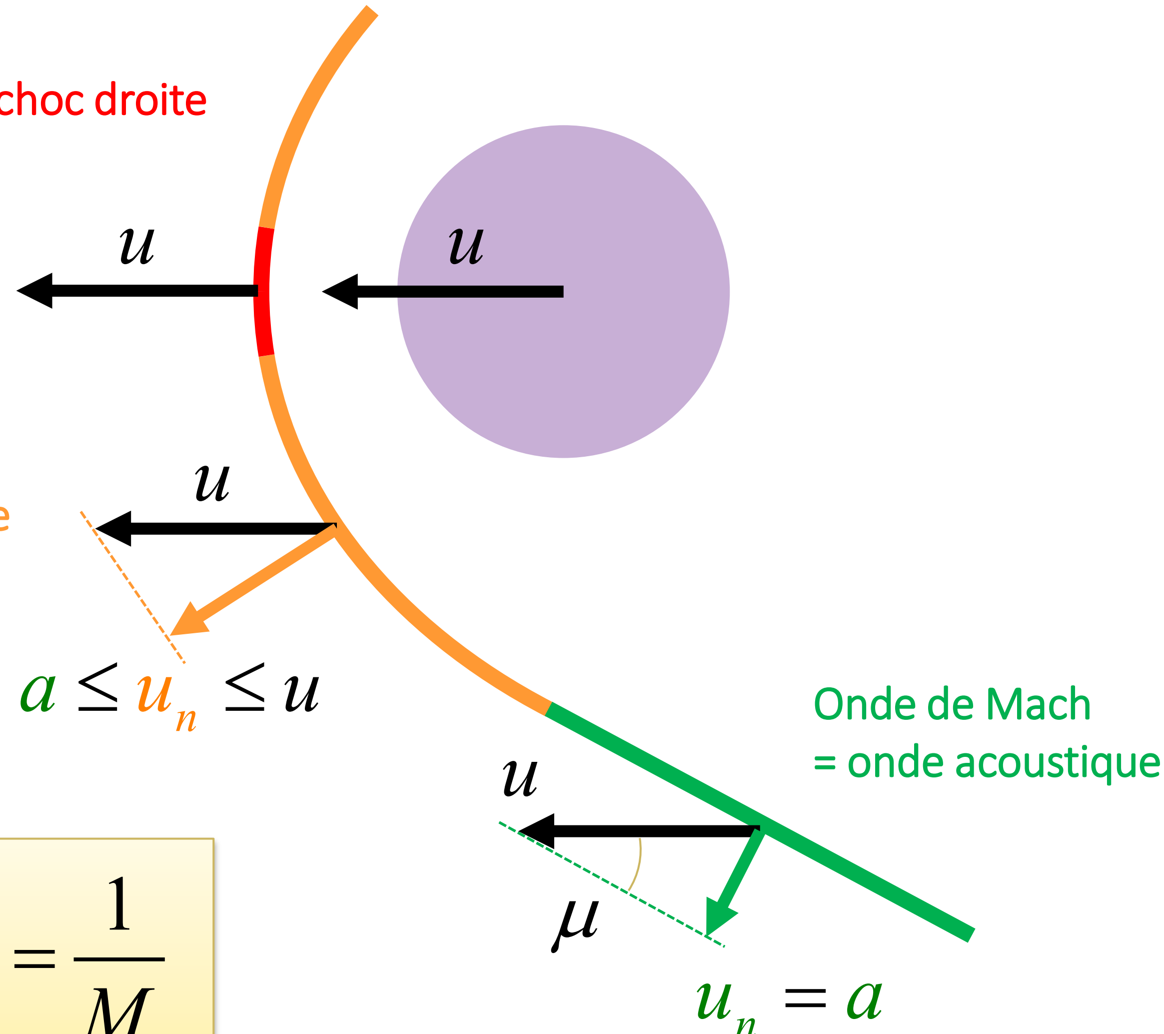




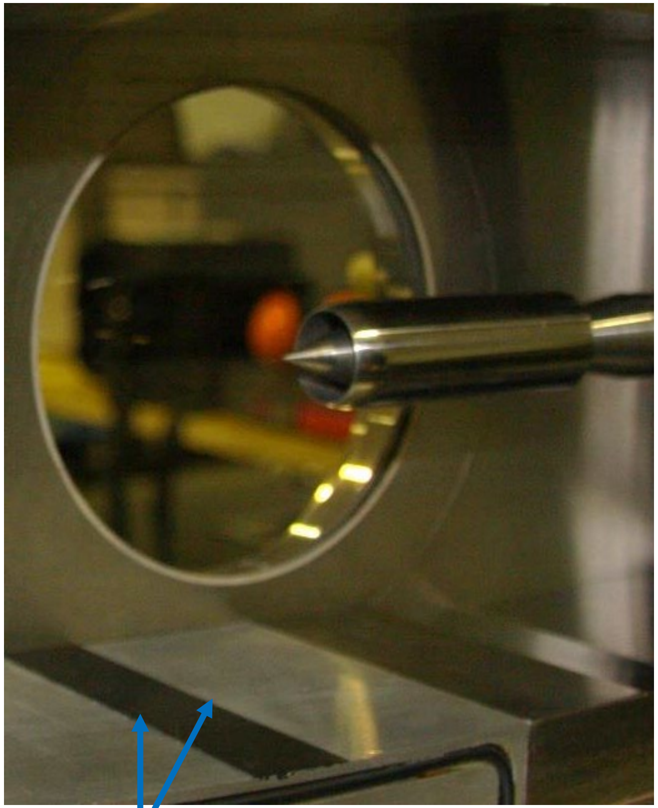
Onde de choc droite

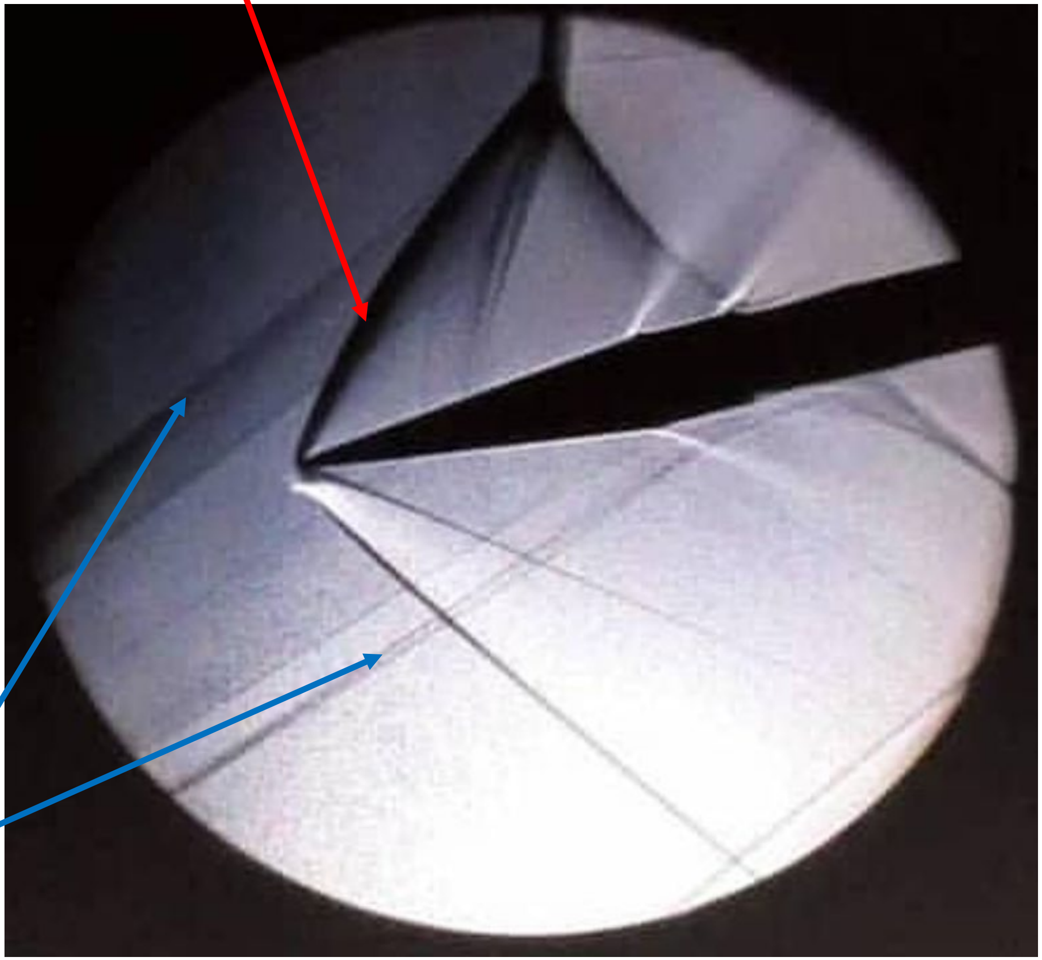
$$M = \frac{u}{a} > 1$$

Onde de choc oblique

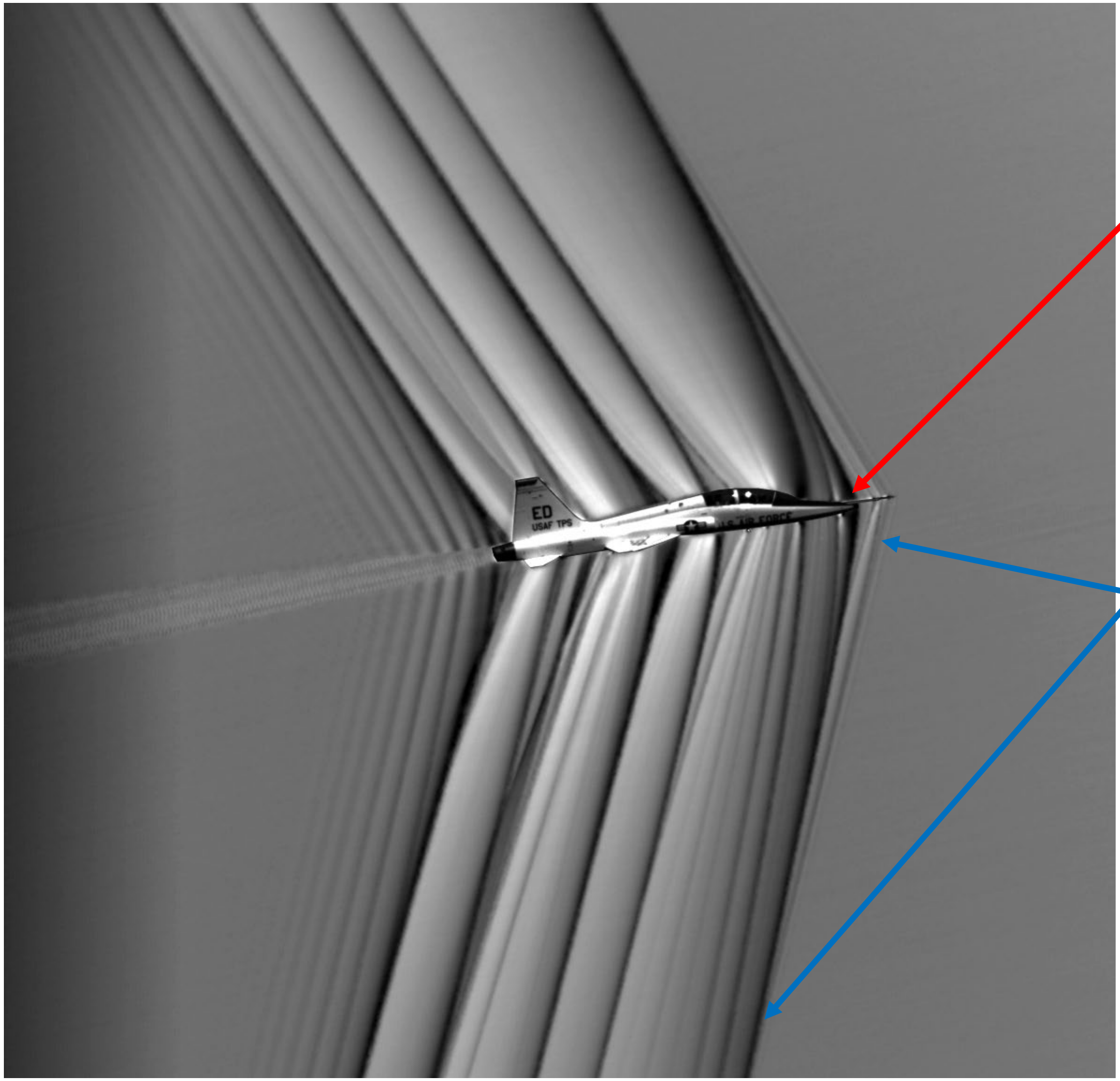


$$\boxed{\sin \mu = \frac{a}{u} = \frac{1}{M}}$$


Scotch générant
les ondes de Mach


Onde de choc
Ondes de Mach

Ondes de Mach



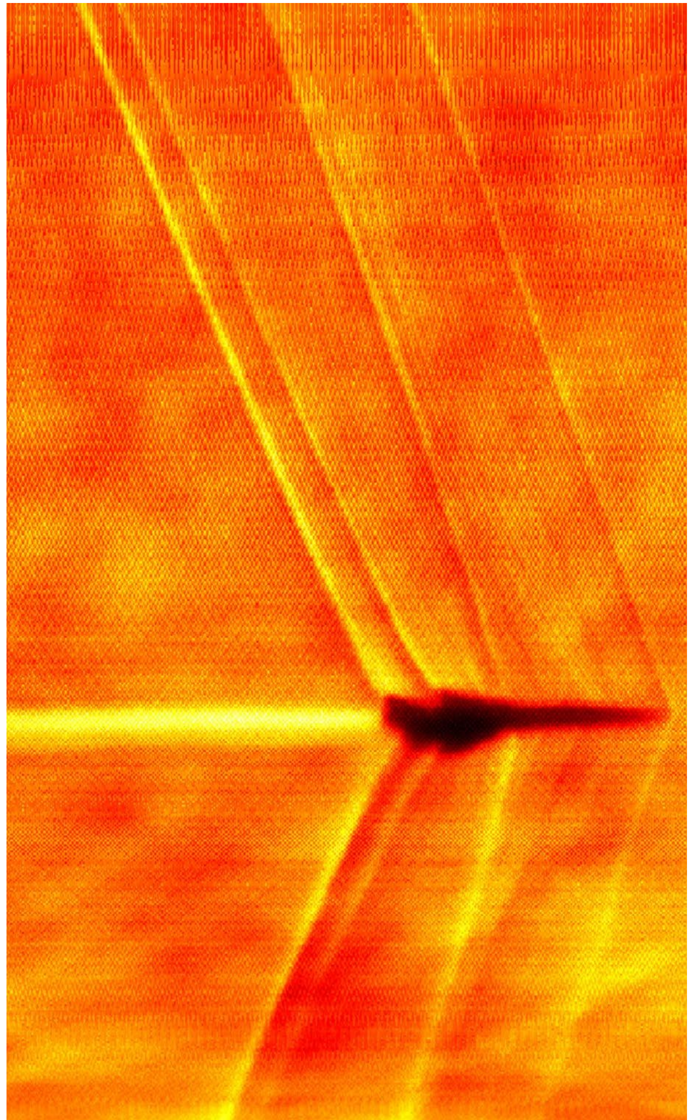
Onde de choc

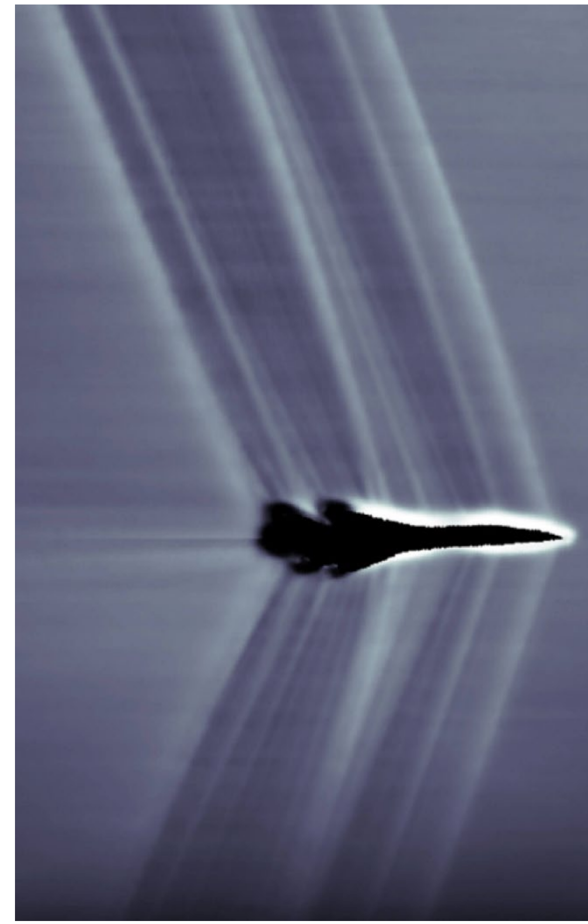
Onde de Mach

Ondes de Mach

Ondes de Mach

https://boomsupersonic.com/





Ondes de Mach

➢ Ecoulements Isentropiques Permanents

- Fluide dénué de viscosité
- Pas de force volumique $\mathbf{f} = 0$
- Pas de rayonnement $r = 0$
- Pas de transfert de chaleur $\nabla \cdot \mathbf{q} = 0$

Conservation de la quantité de mouvement

Equation de conservation de la quantité de mouvement, formulation d'Euler

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p$$

- Dans le cas permanent, la relation précédente devient

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \nabla \left(\frac{u^2}{2} \right) - \mathbf{u} \times \nabla \times \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p$$

- Le long d'une ligne de courant, on obtient finalement:

$$\boxed{\frac{u^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} = const}$$

Conservation d'énergie

Equation de conservation de l'énergie

$$\frac{Dh_0}{Dt} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial t}$$

- Dans le cas permanent, la relation précédente devient

$$\mathbf{u} \cdot \nabla h_0 = 0$$

- Enthalpie d'arrêt (ou totale si la gravité est négligée) constante le long d'une ligne de courant

$$\boxed{h_0 = h + \frac{u^2}{2} = const}$$

Les deux équations sont redondantes

$$\frac{u^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} = const \rightarrow \boxed{\frac{1}{\rho}dp} + udu = 0$$

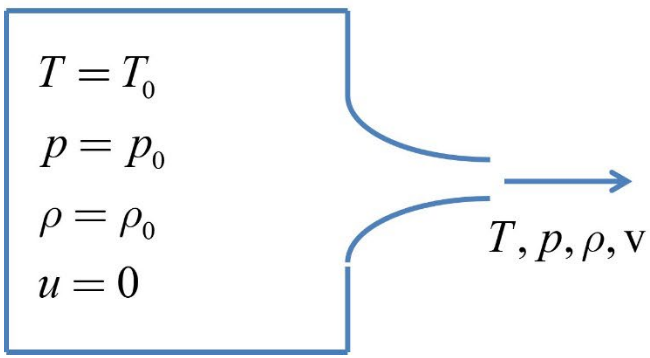
$$h + \frac{u^2}{2} = const \rightarrow \boxed{dh} + udu = 0$$

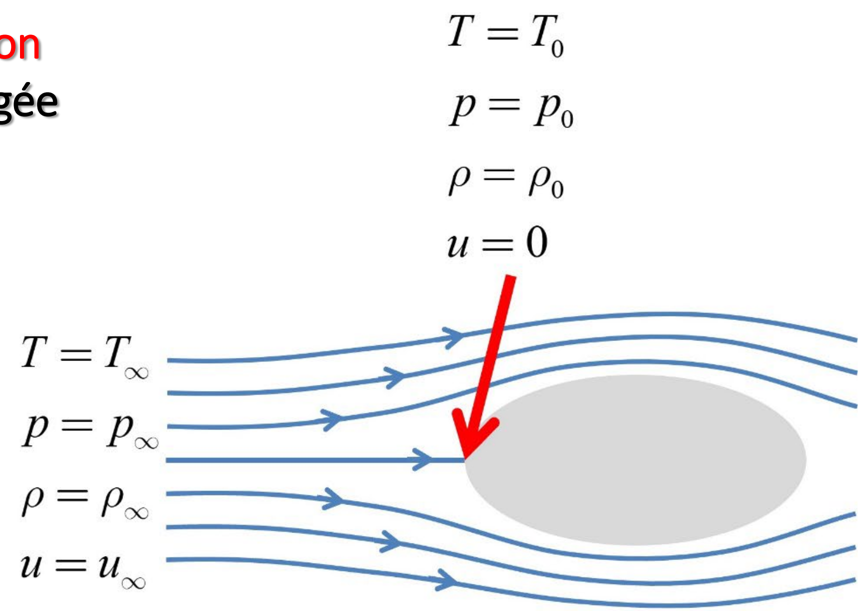
- Or, avec la relation de Gibbs

$$dh = \cancel{Tds} + \upsilon dp \qquad dh = \frac{1}{\rho}dp$$

Grandeurs totales

Grandeurs de réservoir, d'arrêt, de stagnation
= grandeurs totales si la gravité est négligée





- Définition

• Un point d'arrêt d'un écoulement PERMANENT est un point où la vitesse est nulle

• Une grandeur d'arrêt est une grandeur définie en un point d'arrêt d'un écoulement PERMANENT

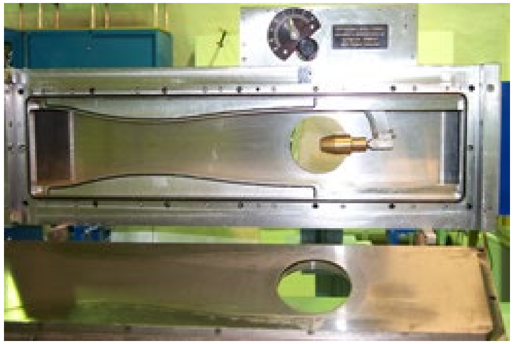
- Notation

$$h_0, T_0, p_0, s_0, \rho_0$$

- Propriété

$$u_0 = 0$$

Grandeurs de réservoir



Détermination des constantes d'intégration à partir des grandeurs d'arrêt

- Le long d'une ligne de courant, l'équation d'énergie s'écrit:

$$h+\frac{u^2}{2}=h_0$$

- Comme l'entropie est une constante pour un écoulement isentrope

$$s=s_0=const.$$

l'enthalpie n'est plus fonction que d'une seule variable d'état (la température par exemple):

$$h\left(T,s_0\right)+\frac{u^2}{2}=h_0\left(T_0,s_0\right)$$

La température d'arrêt T_0 est donc constante pour un écoulement <u>isentrope</u> <u>permanent</u>

- Comme l'entropie est une constante pour un écoulement isentrope

$$p\left(T,s_0\right)\rightarrow p_0\left(T_0,s_0\right)$$
$$\rho\left(T,s_0\right)\rightarrow \rho_0\left(T_0,s_0\right)$$

La pression d'arrêt p_0 et la densité d'arrêt ρ_0 sont donc constantes pour un écoulement <u>isentrope</u> <u>permanent</u>

- On vient de voir que, le long d'une ligne de courant, l'équation d'énergie s'écrit:

$$h + \frac{u^2}{2} = h_0$$

- Pour un gaz parfait (avec : $c_p = const.$) on a (Chap2): $h = c_p T + const.$

$$\boxed{c_p T + \frac{u^2}{2} = c_p T_0}$$

Comme tous les termes sont positifs, à partir d'un réservoir où le gaz est en agitation thermique ($c_p T_0$), cette énergie d'agitation est convertie en énergie cinétique de translation ($\frac{1}{2} u^2$) tandis que l'énergie d'agitation thermique du gaz diminue ($c_p T$).

Grandeurs soniques

- Définition

• Un point sonique d'un écoulement est un point où la vitesse est égale à la célérité du son

• Une grandeur sonique est une grandeur définie en un point aux conditions soniques

- Notation $h_* \; T_* \; p_* \; s_* \; \rho_*$

- Propriété $u_* = a_*$

- On a vu que l'équation de conservation de l'énergie peut s'écrire:

$$c_p T + \frac{u^2}{2} = c_p T_0 = const$$

- En divisant par la température statique T et avec la relation thermodynamique, on obtient:

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{u^2}{2c_p T}$$

- Soit encore

$$\boxed{\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2}\left(\frac{u}{a}\right)^2 = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2}$$

$$c_p = \frac{\gamma r}{\gamma - 1}$$

$$a^2 = \gamma r T$$

$$M = \frac{u}{a}$$

Gaz parfaits

- En utilisant les relations isentropiques et l'équation d'état

$$\frac{p_0}{p} = \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{\gamma} = \left(\frac{T_0}{T}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$p = const \cdot \rho^{\gamma}$$

$$p = \rho r T$$

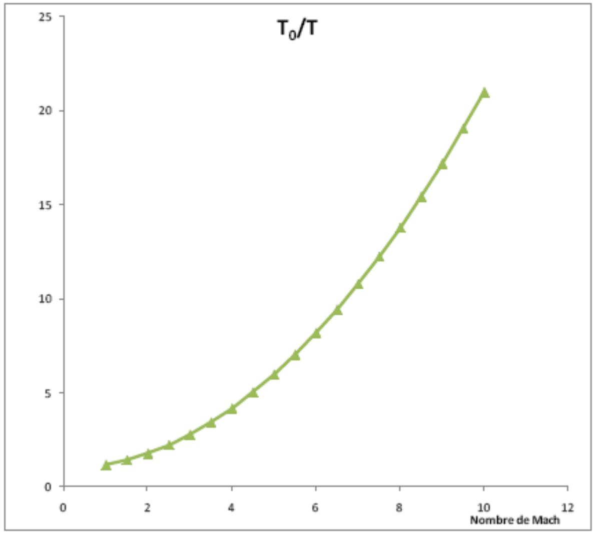
$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2$$

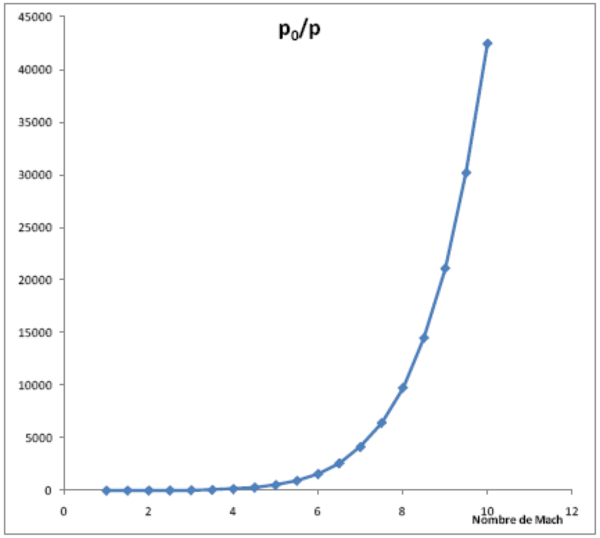
- On obtient à partir de l'expression ci-contre, les relations:

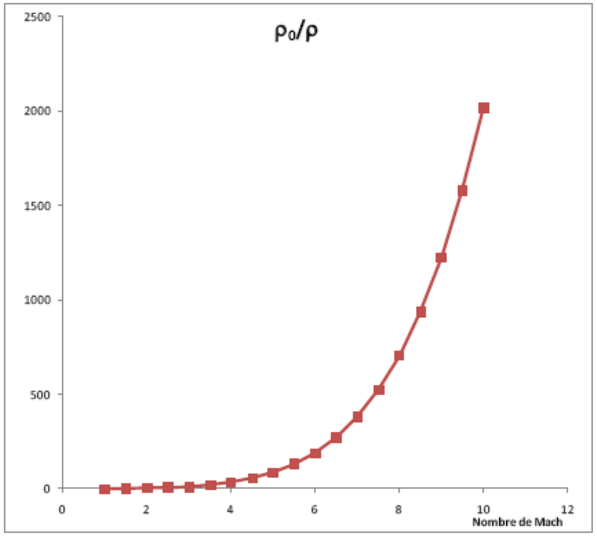
$$\boxed{\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}$$

$$\boxed{\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}}$$

Illustration des relations isentropes



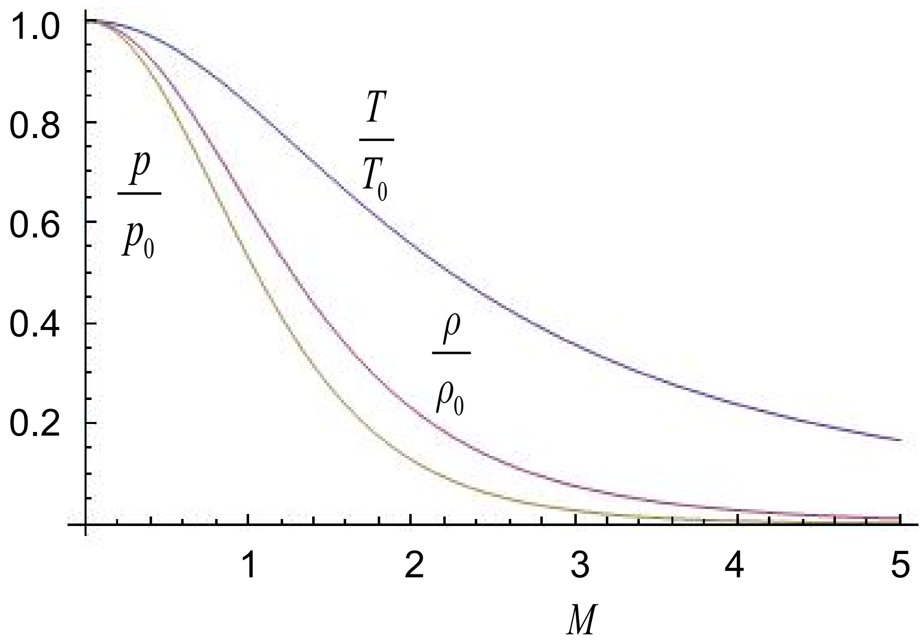




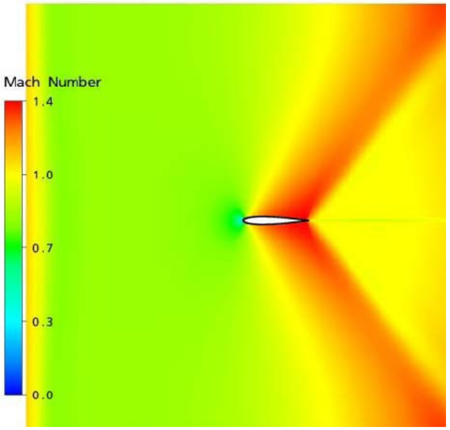
$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \qquad \frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \qquad \frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}$$

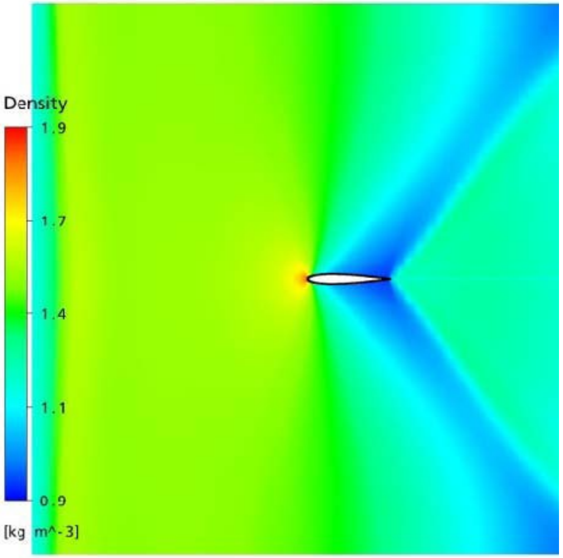
Gaz parfaits

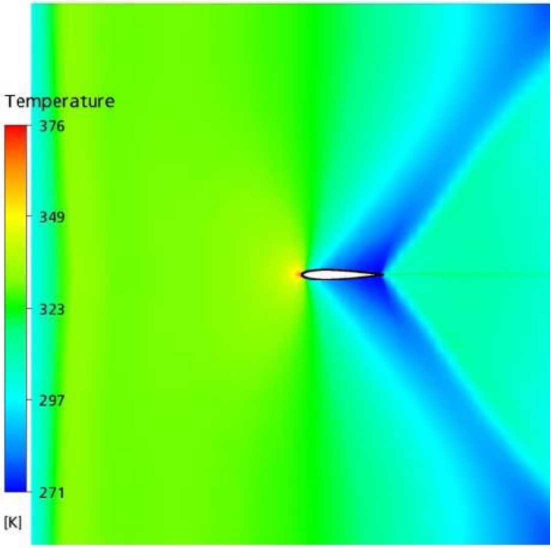
$$\frac{T}{T_0} = \frac{1}{1+\frac{\gamma-1}{2}M^2} \qquad \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{1}{\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}} \qquad \frac{p}{p_0} = \frac{1}{\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}$$

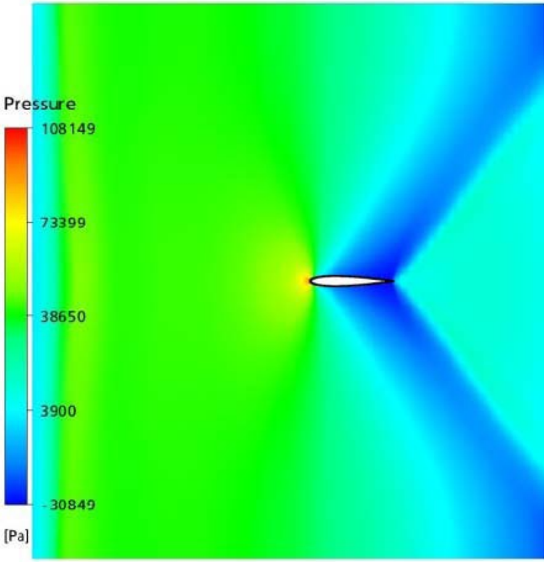


Gaz parfaits









Isentropic Flow Tables

TABLE B.1 Isentropic Flow Table ($\gamma = 1.4$)

M	T/T_o	p/p_o	ρ/ρ_o	A/A^*
0.00	1.0000	1.0000	1.0000	∞
0.02	0.9999	0.9997	0.9998	28.9421
0.04	0.9997	0.9989	0.9992	14.4815
0.06	0.9993	0.9975	0.9982	9.6659
0.08	0.9987	0.9955	0.9968	7.2616
0.10	0.9980	0.9930	0.9950	5.8218
0.12	0.9971	0.9900	0.9928	4.8643
0.14	0.9961	0.9864	0.9903	4.1824
0.16	0.9949	0.9823	0.9873	3.6727
0.18	0.9936	0.9776	0.9840	3.2779
0.20	0.9921	0.9725	0.9803	2.9635
0.22	0.9904	0.9668	0.9762	2.7076

M	T/T_o	p/p_o	ρ/ρ_o	A/A^*
0.94	0.8498	0.5658	0.6658	1.0031
0.96	0.8444	0.5532	0.6551	1.0014
0.98	0.8389	0.5407	0.6445	1.0003
1.00	0.8333	0.5283	0.6339	1.0000
1.02	0.8278	0.5160	0.6234	1.0003
1.04	0.8222	0.5039	0.6129	1.0013
1.06	0.8165	0.4919	0.6024	1.0029
1.08	0.8108	0.4800	0.5920	1.0051
1.10	0.8052	0.4684	0.5817	1.0079
1.12	0.7994	0.4568	0.5714	1.0113
1.14	0.7937	0.4455	0.5612	1.0153
1.16	0.7879	0.4343	0.5511	1.0198

- En un point sonique de l'écoulement, on a par définition $M = 1$

- Les relations pour les grandeurs soniques deviennent:

$$\frac{T}{T_0} = \frac{1}{1+\frac{\gamma-1}{2}M^2}$$

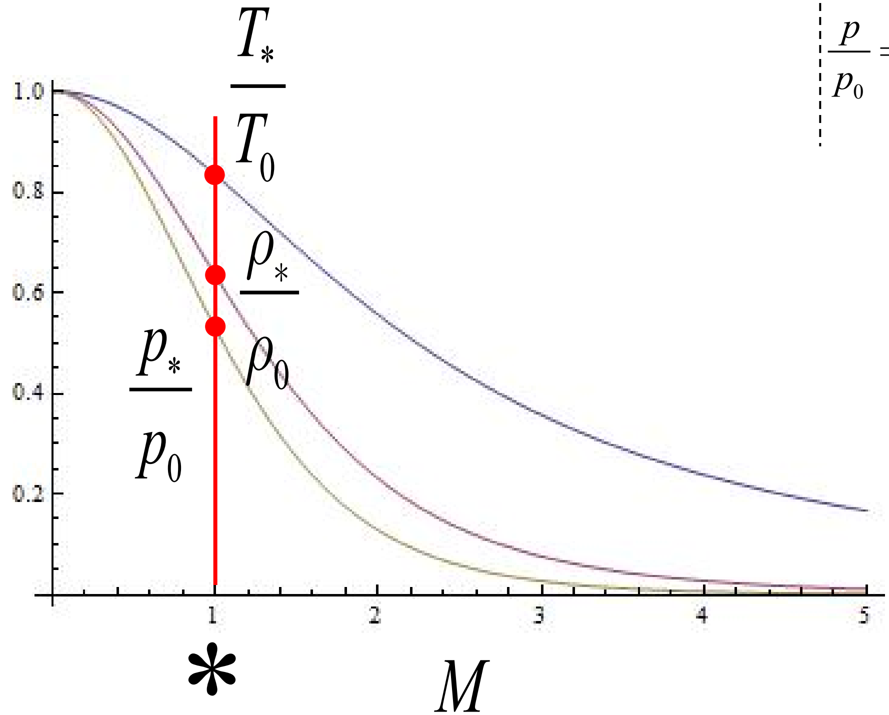
$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{1}{\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}}$$

$$\frac{p}{p_0} = \frac{1}{\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}$$

$$\frac{T_*}{T_0} = \frac{2}{\gamma+1}$$

$$\frac{\rho_*}{\rho_0} = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

$$\frac{p_*}{p_0} = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$



Gaz parfaits

- Si on considère deux points d'une ligne de courant l'équation d'énergie s'écrit

$$h_1 + \frac{u_1^2}{2} = h_2 + \frac{u_2^2}{2}$$

- Avec la relation thermodynamique, la relation précédente devient:

$$\frac{\gamma r T_1}{\gamma - 1} + \frac{u_1^2}{2} = \frac{\gamma r T_2}{\gamma - 1} + \frac{u_2^2}{2}$$

- Avec la relation pour la vitesse du son:

$$\frac{a_1^2}{\gamma - 1} + \frac{u_1^2}{2} = \frac{a_2^2}{\gamma - 1} + \frac{u_2^2}{2}$$

- Le long d'une ligne de courant on a:

$$\boxed{\frac{a^2}{\gamma - 1} + \frac{u^2}{2} = \frac{a_0^2}{\gamma - 1} = const}$$

$$\boxed{\frac{a^2}{a_0^2} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{-1}}$$

$$h_0 = h + \frac{\mathrm{v}^2}{2} = const$$

$$h = c_p T$$

$$c_p = \frac{\gamma r}{\gamma - 1}$$

$$a^2 = \gamma r T$$

$$\mathrm{v}_0 = 0$$

$$M = \frac{\mathrm{v}}{a}$$

Gaz parfaits

- En considérant la différentielle de l'équation précédente

$$\frac{a^2}{\gamma-1}+\frac{u^2}{2}=\frac{a_0^2}{\gamma-1} \rightarrow \frac{2ada}{\gamma-1}+udu=0 \rightarrow \frac{2}{\gamma-1}\frac{da}{a}+M^2\frac{du}{u}=0$$

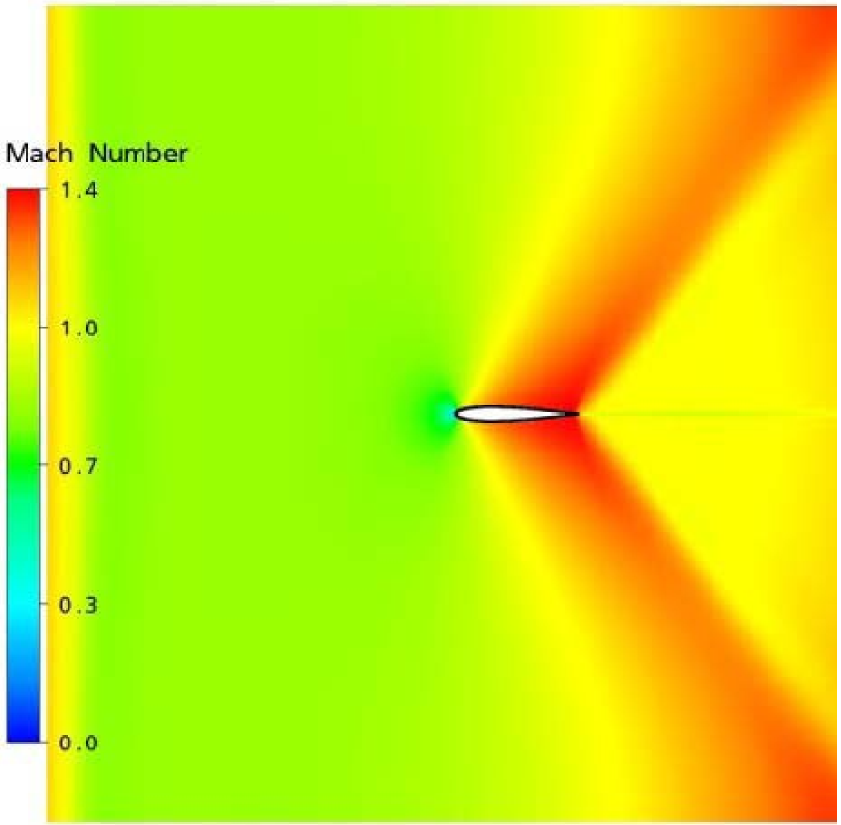
- Avec la définition du nombre de Mach

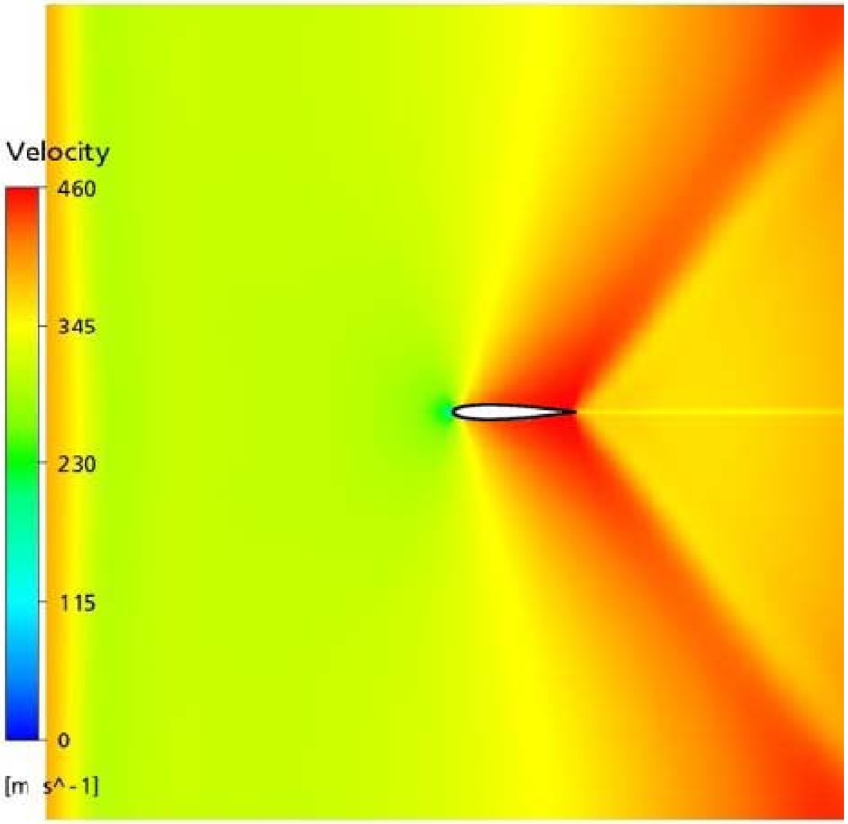
$$M=\frac{u}{a} \rightarrow \frac{dM}{M}=\frac{du}{u}-\frac{da}{a}$$

- En remplaçant

$$\boxed{\frac{du}{u}=\frac{1}{1+\frac{\gamma-1}{2}M^2}\frac{dM}{M}}$$

- Comme g > 1, un accroissement du nombre de Mach implique un accroissement de la vitesse de l'écoulement le long d'une ligne de courant isentrope (indépendamment de la variation de température).


Mach Number
1.4
1.0
0.7
0.3
0.0


Velocity
460
345
230
115
0
[m s^-1]

Gaz parfaits

- En un point sonique, l'équation de conservation de l'énergie s'écrit:

$$\frac{a^2}{\gamma-1}+\frac{u^2}{2}=\frac{a_*^2}{\gamma-1}+\frac{a_*^2}{2}=const$$

$$u=u_*=a_*$$

- Ce qui peut s'écrire sous la forme:

$$\frac{a^2}{\gamma-1}+\frac{u^2}{2}=\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}a_*^2=const$$

- Le long d'une ligne de courant, on a donc

$$\boxed{\frac{a^2}{\gamma-1}+\frac{u^2}{2}=\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}a_*^2=\frac{a_0^2}{\gamma-1}=const}$$

Détermination du type d'écoulement en fonction des grandeurs soniques:

$$\frac{a^2}{\gamma-1}+\frac{u^2}{2}=\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}a_*^2=const$$

- La relation précédente peut s'écrire encore:

$$\frac{u^2-a_*^2}{2}=\frac{a_*^2-a^2}{\gamma-1}$$

Si v > a_* ⟺ a_* > a ⟹ v > a ⟹ M >1 Ecoulement supersonique

Si v < a_* ⟺ a_* < a ⟹ v < a ⟹ M <1 Ecoulement subsonique

Nombre de Mach associé aux grandeurs soniques $M_* = \dfrac{u}{a_*}$

- L'équation de la conservation de l'énergie exprimée en fonction des grandeurs soniques et divisée par u² devient:

$$\frac{(a/u)^2}{\gamma-1}+\frac{1}{2}=\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}\frac{a_*^2}{u^2}$$

$$\frac{a^2}{\gamma-1}+\frac{\mathrm{v}^2}{2}=\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}a_*^2=const$$

- En faisant apparaître les nombre de Mach ***M*** et ***M****

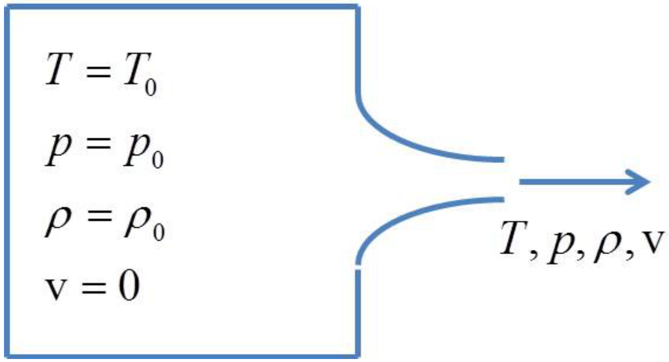
$$\boxed{M_*^2=\frac{(\gamma+1)M^2}{2+(\gamma-1)M^2}}$$

$$\boxed{M^2=\frac{2}{\dfrac{\gamma+1}{M_*^2}-(\gamma-1)}}$$

$$\begin{array}{lcl} M=1 & \rightarrow & M_*=1 \\ M<1 & \rightarrow & M_*<1 \\ M>1 & \rightarrow & M_*>1 \end{array}$$

Gaz parfaits

Détente dans le vide (p = 0)



$$c_p T + \frac{u^2}{2} = c_p T_0$$

- Si p = 0, alors T = 0 et a = 0

$$\boxed{u = \sqrt{2 c_p T_0}}$$

$$\boxed{M = \frac{u}{a} \rightarrow \infty}$$

$$\boxed{M_*^2 = \frac{(\gamma+1)M^2}{2+(\gamma-1)M^2} \rightarrow \frac{(\gamma+1)}{(\gamma-1)}}$$

$$u = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}\frac{R}{\mathcal{M}}T_0}$$

Quand un écoulement est-il compressible?

- En intégrant $udu = -1/\rho\, dp$ entre un réservoir (vitesse nulle) et un état proche:

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^u u'du' = \frac{1}{2}u^2 \\ &-\int_{p_0}^{p_0+\delta p} \frac{1}{\rho} dp' \sim -\int_{p_0}^{p_0+\delta p} \frac{1}{\rho_0 + \delta\rho'} \delta p' \sim -\int_{p_0}^{p_0+\delta p} \frac{1}{\rho_0} \delta p' = -\frac{1}{\rho_0}\delta p \end{aligned}\right\} \delta p \sim -\frac{1}{2}\rho_0 u^2$$

- Avec: $a^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s$, on a pour un écoulement isentrope: $\delta p \sim a^2 \delta\rho$

- Ainsi: $$\boxed{\frac{\delta\rho}{\rho_0} \sim -\frac{1}{2}\frac{u^2}{a^2} = -\frac{1}{2}M^2}$$

Le nombre de Mach représente une mesure des variations relatives de masse volumique, soit l’erreur qu’on commet en considérant une masse volumique constante.

Quand un écoulement est-il compressible?

- Equation de Bernoulli généralisée pour les écoulements compressibles de gaz parfaits:

$$\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho}+\frac{u^2}{2}=\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_0}{\rho_0}$$

$$h_0=h+\frac{u^2}{2}=const$$

$$h=c_pT$$

$$c_p=\frac{\gamma r}{\gamma-1}$$

$$rT=\frac{p}{\rho}$$

- Développement de la relation isentropique

$$\frac{p_0}{p}=1+\frac{\gamma}{2}M^2+\frac{\gamma}{8}M^4+\frac{\gamma(2-\gamma)}{48}M^6+..$$

$$\frac{p_0}{p}=\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

- Ou

$$p_0-p=\frac{\gamma p}{2}M^2\left(1+\frac{1}{4}M^2+\frac{2-\gamma}{24}M^4+...\right)$$

- Où

$$\frac{\gamma p}{2}M^2=\frac{\gamma p}{2}\frac{u^2}{\gamma p/\rho}=\frac{1}{2}\rho u^2$$

$$a^2=\frac{\gamma p}{\rho}$$

$$M=\frac{u}{a}$$

Quand un écoulement est-il compressible?

- Ainsi

$$p_0 - p = \frac{1}{2}\rho u^2\left(1+\frac{1}{4}M^2+\frac{2-\gamma}{24}M^4+\ldots\right)$$

- Développement de la relation isentropique

$$\frac{\rho}{\rho_0} = 1-\frac{1}{2}M^2+\frac{\gamma}{8}M^4+\ldots$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

- Donnant finalement

$$\boxed{p_0 - p = \frac{1}{2}\rho_0 u^2\left(1-\frac{1}{4}M^2+\frac{2\gamma-1}{24}M^4+\ldots\right)}$$

M	**0.1**	**0.2**	**0.3**
$\frac{p_0 - p}{\frac{1}{2}\rho_0 u^2}$	0.9975	0.9901	0.9781